

## 球面三角法

### (1) はじめに

平面の三角形にはいくつかの公式がある。例えば、内角の和が $180$ 度である、直角三角形の2辺の2乗の和は対辺の2乗に等しい（ピタゴラスの定理）などである。同様に、球面上の三角形の性質を調べ、いくつかの公式を導き、利用することが可能である。この数学の一分野を球面三角法と呼ぶ。

球面三角法は天球面に存在する天体の位置や角度の計算などに利用される。現代ではこのような計算には回転行列を用いるのが一般的であり、球面三角法はほとんど廃れたようである。しかし球面三角法は慣れると大変簡便であり、また適切に用いれば天文学以外の分野にも有意義である。そのような例を末尾に記した。

### (2) 球面三角

球面三角とは、球面上の3点を結ぶ3つの大円の弧で囲まれた部分をいう。図A1の太線で表した部分が球面三角である。球面三角を形成するのが「大円の弧」であることが重要である\*。球面三角は平面三角と同様に3つの頂角 ( $A, B, C$ ) と3つの辺 ( $a, b, c$ ) をもつ。ただし、球面三角の辺の大きさは球の中心から張る角度によって表される。平面三角の辺は長さによって表されることと異なっている。

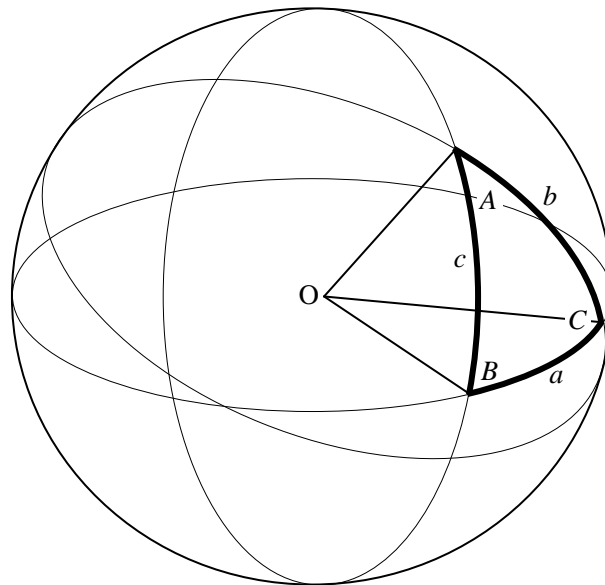


図 A1. 球面三角 $\triangle ABC$

\* その弧を含む平面が、球の中心を通るということ。もっと簡単に言えば、球の中心を通るように球を切ったときの切り口で作られる三角形が球面三角である。

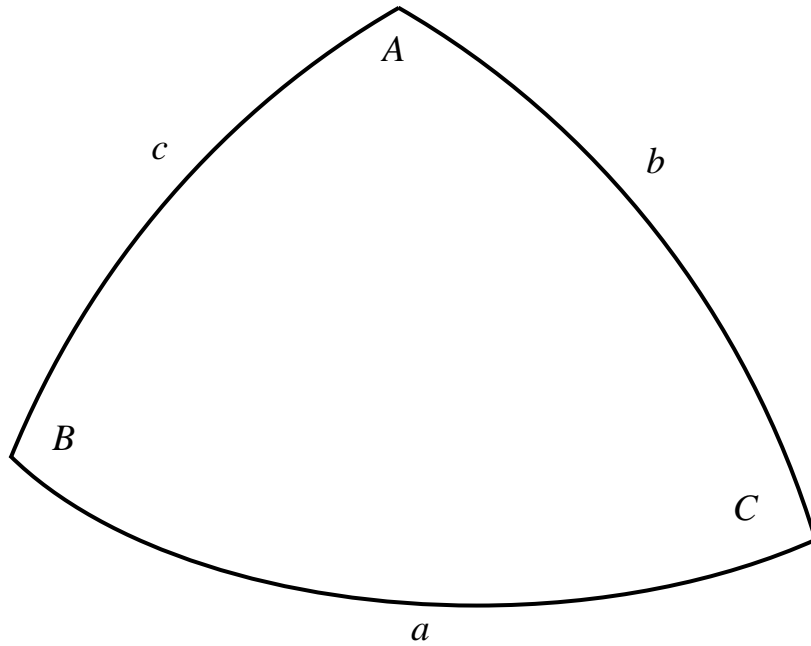


図 A2. 球面三角の拡大図

これらの6個の角度の間に成立する基本公式を以下に示す。証明は後に述べる。

(A) 余弦法則 
$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{cases}$$

(B) 正弦法則 
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

(C) 正弦・余弦法則 
$$\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \end{aligned}$$

これらを並べて書くと

$$\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{aligned}$$

となる。

球面三角の基本公式は次のように導かれる。簡単のために球の半径を1とする。

頂点Aから辺bと辺cに接する直線を引き、それが直線OB、OCと交わる点をそれぞれD、Eとする(図A3)。∠DAEは球面三角の角Aに等しく、また∠OADおよび∠OAEは直角である。

○余弦法則の導出

平面三角形ADEに、平面三角の余弦法則を適用する。

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AD}\overline{AE}\cos A \\ &= \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2\overline{OD}\overline{OE}\cos a\end{aligned}$$

△OADは直角三角形なので、次の関係が成り立つ (sec x = 1/cos x で、セカントと読む)。

$$\overline{AD} = \tan c, \quad \overline{OD} = 1/\cos c = \sec c$$

$$\overline{AE} = \tan b, \quad \overline{OE} = 1/\cos b = \sec b$$

これを上の式に代入すると

$$\tan^2 c + \tan^2 b - 2 \tan c \tan b \cos A = \sec^2 c + \sec^2 b - 2 \sec c \sec b \cos a$$

となる。ここで

$$\begin{cases} \tan^2 c + \tan^2 b = \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} + \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} \\ \sec^2 c + \sec^2 b = \frac{1}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 b} = \frac{\sin^2 c + \cos^2 c}{\cos^2 c} + \frac{\sin^2 b + \cos^2 b}{\cos^2 b} \end{cases}$$

$$\therefore (\sec^2 c + \sec^2 b) - (\tan^2 c + \tan^2 b) = 2$$

という関係を使って、次のように式変形する。

$$-2 \tan c \tan b \cos A = 2 - 2 \sec c \sec b \cos a$$

$$\therefore -\tan c \tan b \cos A = 1 - \sec c \sec b \cos a$$

これから余弦法則が導かれる。

$$\begin{aligned}\cos a &= \frac{1}{\sec c \sec b} + \frac{\tan c \tan b \cos A}{\sec c \sec b} \\ &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\end{aligned}$$

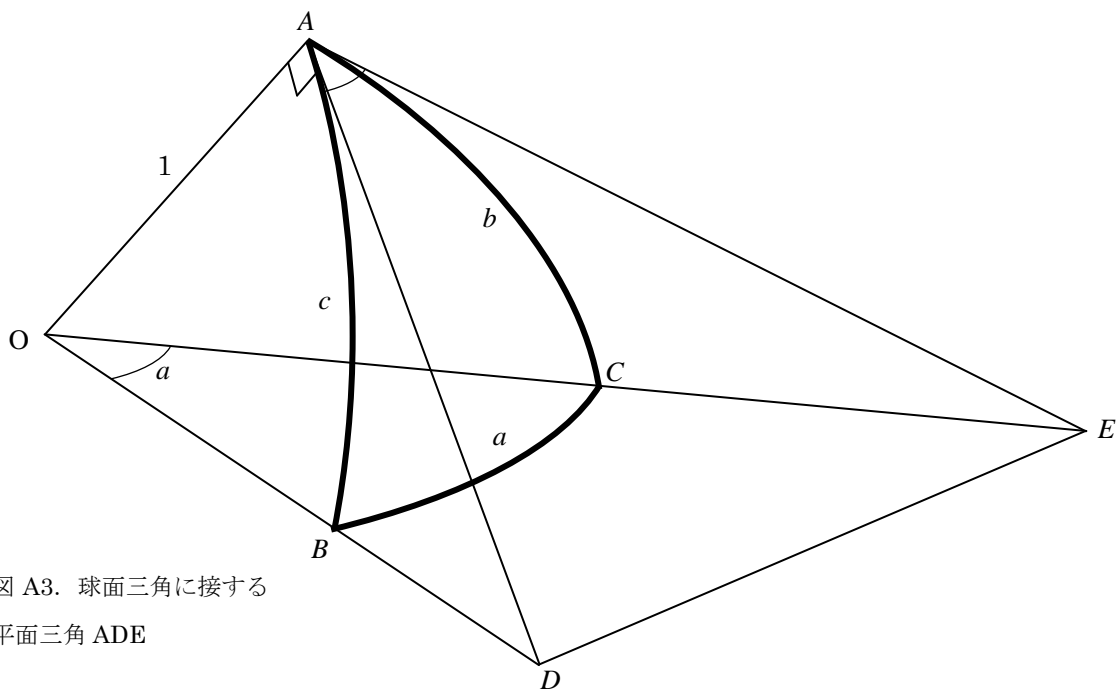


図 A3. 球面三角に接する  
平面三角 ADE

○正弦法則の導出

余弦法則の式を変形する。

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

これを  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  に代入して変形し

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1 - \cos^2 A \\ &= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c} \end{aligned}$$

両辺を  $\sin^2 a$  で割って平方根をとると次の式になる。

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}}$$

右辺は循環しているので、左辺の組を(A, a)から(B, b)または(C, c)に入れかえても変化しない。また、今考えている球面三角では  $A, B, C, a, b, c < \pi$  なので左辺は常に正である。したがって右辺の±は+だけ選ばばよい。よって正弦法則が導かれる。

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

○正弦・余弦法則の導出

$\cos b$  の余弦法則に、 $\cos a$  の余弦法則を代入する。

$$\begin{aligned} \sin c \sin a \cos B &= \cos b - \cos c \cos a \\ &= \cos b - \cos c (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) \\ &= \cos b \sin^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos A \end{aligned}$$

両辺を  $\sin c$  で割ると正弦・余弦法則が導かれる。

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

(B, b)と(C, c)を入れかえても同じように成り立つ。

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin b \cos b \cos A$$



球面三角の余弦公式により

$$\cos z = \cos \theta \cos p + \sin \theta \sin p \cos T'$$

である。これに  $z = 90^\circ - h$ 、 $\theta = 90^\circ - \varphi$ 、 $p = 90^\circ - \delta$  を適用すると

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos T'$$

を得る。右辺は全て既知の値なので、これから  $\arcsin$  によって高度  $h$  を計算できる<sup>‡</sup>。

次に球面三角の正弦公式から

$$\sin z \sin A = \sin p \sin T'$$

これに再び  $z = 90^\circ - h$ 、 $p = 90^\circ - \delta$  を適用すると

$$\cos h \sin A = \cos \delta \sin T'$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sin T' \cos \delta}{\cos h}$$

また正弦・余弦法則から

$$\sin z \cos A = \sin \theta \cos p - \cos \theta \sin p \cos T'$$

$$\therefore \cos h \cos A = \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos T'$$

$$\therefore \cos A = \frac{\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos T'}{\cos h}$$

である。 $0 \leq A \leq 360^\circ$  であり、 $\sin A$  だけでは  $A$  に不定性が残るので  $\cos A$  も求めた。 $\cos A$  と  $\sin A$  から方位角  $A$  が得られる。

計算例：  $T' = 60^\circ$ 、 $\delta = 10^\circ$ 、 $\varphi = 30^\circ$  の場合の  $A$  と  $h$  を求める。

○  $h$

$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos T'$  より

$$\begin{aligned} h &= \arcsin(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos T') \\ &= \arcsin(0.513) \\ &= 31^\circ \end{aligned}$$

○  $A$

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{\sin T' \cos \delta}{\cos h} \\ &= 0.994 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos T'}{\cos h} \\ &= -0.112 \end{aligned}$$

この2つから

$$A = 96^\circ$$

---

<sup>‡</sup>  $-90 \leq h \leq 90^\circ$  なので、 $\arcsin$  による不定性はない。

### 3-2. 地上の2地点間の距離

経度と緯度のわかった2地点AとBの距離を計算する。ここでは地球は半径  $R$  の球であると仮定し、2地点間の距離は地表に沿って測るものとする。

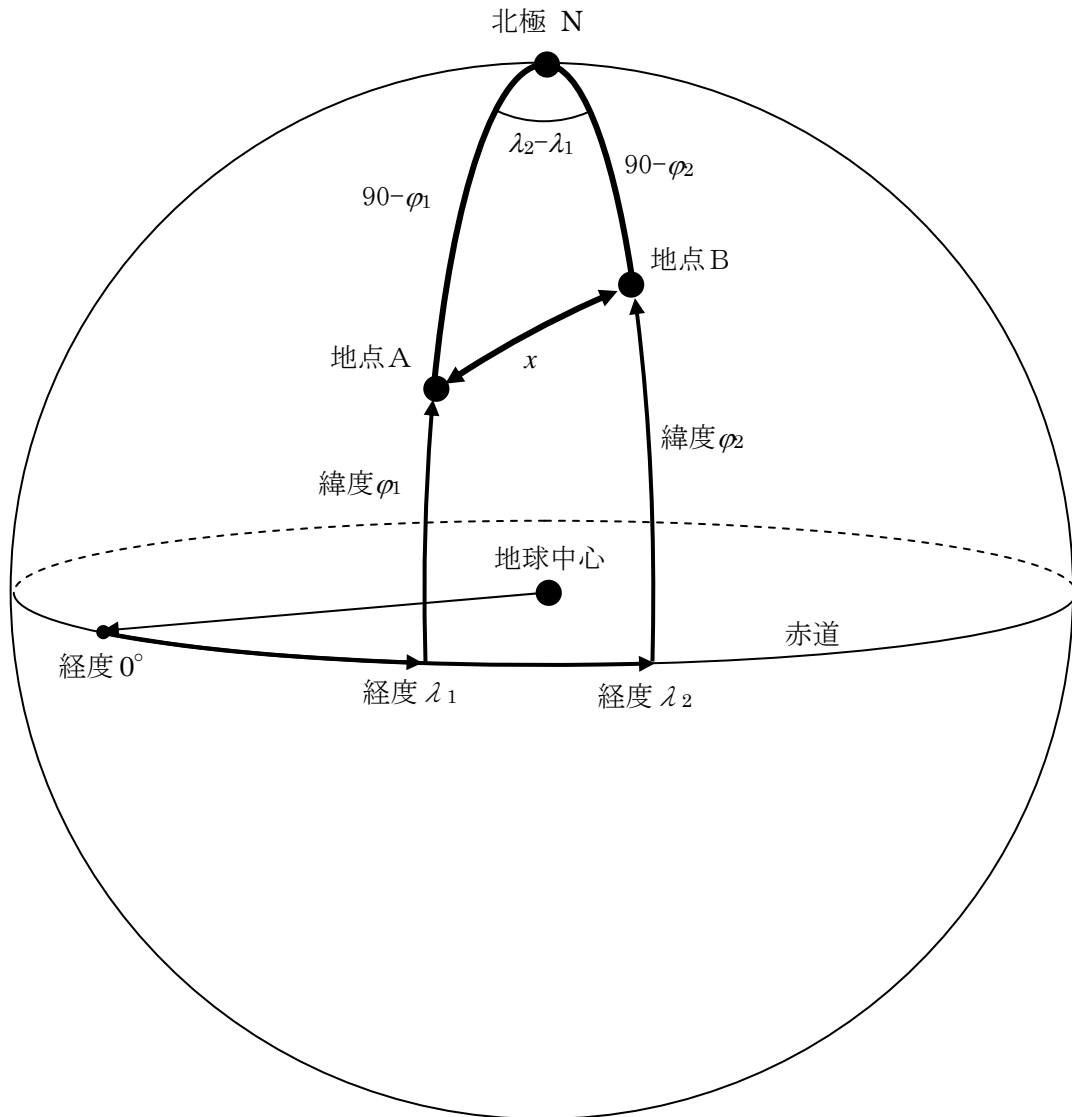


図 A5. 地球上の2地点間距離

図の太線で囲まれた球面三角形に余弦法則を適用すると

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(90 - \varphi_1)\cos(90 - \varphi_2) + \sin(90 - \varphi_1)\sin(90 - \varphi_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1) \\ &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

であり、

$$x = \cos^{-1}(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1))$$

によって  $x$  を計算できる。この場合は  $0 \leq x \leq 180^\circ$  なので、 $\cos^{-1}$  によって得た結果にあいまいさは無い。2地点間の距離  $L$  は、

$$L = Rx$$

によって計算できる。ただし  $x$  はラジアン値にしておく必要がある。